碳限额与交易机制下考虑信用支付的库存模型研究*

李忠辉
广西财经学院数学与数量经济学院
南宁 530003

薛广明**
南宁学院人工智能学院
南宁 530200

摘 要 在“双碳”背景下，针对指数增长时变需求与信用支付，构建以零售商利润为目标的EOQ改进模型。根据信用期M与补货周期T的关系，分两类情形建立目标函数，证明其凸性并给出最优解存在且唯一的引理与定理，基于Karush-Kuhn-Tucker 条件设计“分段-迭代”混合算法步骤，输出最优订货策略和碳排放指标。仿真结果表明，信用支付策略较无信用情形单位时间碳排放降低至87.43%且单位时间利润增加到101.90%，以此验证了模型有效性。企业可依据实时碳价并在有效区间动态调整信用期，实现利润与碳排放平衡。

关键字 碳限额与交易机制 信用支付 时变需求 变质

Research on Inventory Model with Trade Credit under Carbon Cap and Trade Mechanism

Li Zhonghui
School of Mathematics and Quantitative Economics, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning 530003, China

Xue Guangming**
School of Artificial Intelligence, Nanning University, Nanning 530200, China

Abstract----An inventory model of EOQ extension is proposed for profit-maximizing with exponentially increasing time-varying demand and trade-credit under the “dual-carbon” background. Two complementary object functions are formulated according to the relative magnitudes of the trade credit and the replenishment cycle. Convexity of each objective function is proven and existence–uniqueness theorems and associated lemmas are derived via Karush-Kuhn-Tucker conditions. A hybrid “segment-and-iterate” algorithm is designed to simultaneously produce the optimal replenishment policy and the corresponding carbon-emission metrics. Numerical experiments calibrated with real-world data reveal that, relative to the no-trade-credit, the proposed trade-credit policy reduces per-unit-time carbon emissions by 87.43 % while increasing per-unit-time profit by 101.90 %. These results confirm the model’s validity and demonstrate that managers can dynamically tune the trade credit within an effective interval according to the prevailing carbon price to strike a desired balance between profitability and carbon abatement.

Keywords----Carbon Cap and Trade Mechanism, Trade Credit, Time-varying demand, Deterioration.

1 引 言

温室气体的排放对社会和人们的日常生活都产生了重大的不利影响，影响了经济的发展。为了应对国际和各国政府对节能减排的要求，以及日益增长的低碳环保需求，减少二氧化碳排放已成为制造企业必须解决的紧迫问题。各国政府针对国情制定了响应的碳排放政策，常见的碳排放政策主要包括，碳税、碳限额和碳限额与交易机制三种[1]。

碳税是一种基于碳排放量的税收政策，旨在鼓励减少温室气体排放并促进低碳经济发展。它通过向企业和个人征收以二氧化碳排放量为基础的税款，以激励减少排放和采取更环保的措施[2]。碳限额是指设定特定行业或整个国家的温室气体排放的上限，以控制和管理排放量[3]。

为了使得减排效果更好，减排政策更加灵活，在碳限额的基础上加上碳交易机制，即碳限额与交易机制，这是一种弹性和市场化的减排机制，通过建立碳市场，将温室气体排放额度（排放权证书或减排单位）作为商品在市场上进行买卖。企业和机构可以在市场上交易排放配额，如果某企业减排超过限额，可将剩余的配额出售给其他企业，从而实现减排成本的灵活分配[4]。碳交易机制则通过市场化手段，鼓励企业采取创新技术和减排措施，并提高整体减排效果。碳限

*基金资助：本文得到广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2023KY0680)、广西向海经济智能系统分析与决策重点实验室(2024C015)资助.

**通讯作者：薛广明 xueguangming0417@126.com

额与碳交易的结合实施有助于推动减排行动，应对气候变化，并促进可持续发展[5-8]。

因此，碳限额与交易机制下的库存与供应链协调具有重要的理论意义和实践意义，研究制造企业如何调整生产经营，平衡经济效益和碳减排要求，做出有效的生产和定价决策，以达到最大限度减少碳排放的目的[9]。碳限额与交易机制和库存模型之间存在密切的关系[10]，库存模型可以被用来评估并预测未来温室气体的需求和供应情况，为制定碳限额和交易的政策提供重要依据[11]。

在碳限额与交易机制的框架下，众多零售商面临着一定的资金压力。此时，采用信用支付策略成为一种有效的缓解手段[12]。信用支付，指的是在碳交易过程中，零售商凭借自身的信用状况，向金融机构或碳交易平台申请一定额度的信用额度，以此来延迟支付碳排放配额购买款项。

经典的 EOQ 模型是以零售商的利润为目标函数[13]，决策最优补货周期，随着模型的发展和复杂程度增加，目标函数是多阶段决策的优化问题[14]，还有多目标的优化模型[15, 16]。

综上所述，研究信用支付依赖订购量的策略，对于企业和库存管理者来说具有重要价值，在碳限额与交易机制下建立信用期支付依赖订购量的库存模型，决策最优订购策略，观察比较模型在碳排放方面的效果，实现减少碳排放和实现可持续发展的目标，同时提高销售额和客户满意度，得出相关的管理启示。此研究为库存管理者提供了有价值的管理参考，帮助他们更好地适应碳排放的限制和环境要求，并能够促进可持续发展、提高经济效益和环境保护的双赢局面的实现。

2 符号与假设

2.1 符号

为了建模的需要，对模型中使用的符号和假设作如下说明。

2.2 假设

(1) 一个零售商批发单一产品向确定型需求的顾客在单一渠道售卖。

(2) 需求率为时变函数 $D(t)=D_0e^{\lambda t}$。

(3) 考虑产品变质率是常数，补货瞬间完成，不允许缺货。

(4) 在碳限额与交易政策下，政府相关部门会给零售商一定配额碳排放量，当零售商的碳排放量大于配额时，零售商则需购买一定碳排放权，也就是支付超额排放成本，反之，零售商可以交易出去多余碳排放权而获得收益。

(5) 供应商向零售商提供天数型的信用支付策略．在信用期 M 内零售商不需支付任何费用， 并且销售收入可以获得利息（利率为 I_e）；信用期结束时（$t=M$ 时）， 零售商支付全部货款， 而且还要为未售出的物品支付利息（利率为 I_c）.

符号和假设作说明

符号	含义
A	固定订购费
p	销售单价
c	订购单价
h	单位时间单位物品存储费
θ	产品变质率
T	补货周期
Q	订购量
M	信用期
I_e	收益利率
I_c	延期支付利率
E	有限规划时域内的碳配额
A^e	每次订货产生的固定碳排放量
c_e	单位碳排放权交易价格
c^e	订购单位产品产生的碳排放量
h^e	存储单位产品单位时间产生的碳排放量

3 模型建立

在销售期间 $[0,T]$，库存水平 $I(t)$ 满足以下微分方程

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\theta I(t)-D(t),\quad 0\le t\le T. \tag{1}$$

利用边界条件 $I(T)=0$，求得第一阶段库存水平为

$$I(t)=\int_t^T e^{\theta(x-t)}D(x)dx,\quad 0\le t\le T. \tag{2}$$

每个周期的初始库存与订购量

$$Q=I(0)=\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx. \tag{3}$$

销售收入：$P=p\int_0^T D(x)dx.$

订购成本：$C=cQ=c\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx.$

存储费：$H=h\int_0^T I(t)dt=h\theta^{-1}\int_0^T (e^{\theta x}-1)D(x)dx.$

由于碳排放与订购和存储相关，所以碳排放量 CE 计算如下

$$CE = e^{A} + e^{c}\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx + e^{h}\theta^{-1}\int_0^T (e^{\theta x}-1)D(x)dx. \tag{4}$$

碳排放成本：$CEC = c_e\left(CE - E\right)$.

计算利息收益与利息支出，根据销售周期与信用期的大小关系，分为 $M \le T$ 与 $M > T$ 两种情形计算.

情形 1 信用期小于销售周期，即 $M \le T$.

此时，零售商在 $[0,M]$ 通过销售收入获得利息收入为 $IE_1 = pI_e\int_0^M (M-x)D(x)dx$.

而在信用期结束后 $[M,T]$ 为占用资金的库存支付利息，$IC_1 = cI_c\theta^{-1}\int_M^T D(x)(e^{\theta(x-M)}-1)dx$.

情形 2 信用期大于销售周期，即 $M > T$.

$$IE_2 = pI_e\int_0^T (M-x)D(x)dx.$$

此种情形，信用期结束前，销售已经结束，没有占用资金的库存，所以没有利息支出，即 $IC_2 = 0$ 。

以零售商的利润为目标函数建模模型，其中目标函数包含销售收入、固定订购费、订购成本、存储费、碳排放成本及利息收入与支出，即

$$TP(T) = \begin{cases} TP_1(T), & M \le T; \\ TP_2(T), & M > T. \end{cases} \tag{5}$$

其中，$TP_i(T) = P - A - C - H - CEC + IE_i - IC_i, i = 1,2.$ 经计算得：

$$\begin{aligned} TP_1(T) = {} & p\int_0^T D(x)dx - c\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx \\ & -h\theta^{-1}\int_0^T (e^{\theta x}-1)D(x)dx \\ & -c_e[e^{A} + e^{c}\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx \\ & +e^{h}\theta^{-1}\int_0^T (e^{\theta x}-1)D(x)dx - E] \\ & +pI_e\int_0^M (M-x)D(x)dx \\ & -cI_c\theta^{-1}\int_M^T D(x)(e^{\theta(x-M)}-1)dx. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} TP_2(T) = {} & p\int_0^T D(x)dx - c\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx \\ & -h\theta^{-1}\int_0^T (e^{\theta x}-1)D(x)dx \\ & -c_e[e^{A} + e^{c}\int_0^T e^{\theta x}D(x)dx \\ & +e^{h}\theta^{-1}\int_0^T (e^{\theta x}-1)D(x)dx - E] \\ & +pI_e\int_0^T (M-x)D(x)dx. \end{aligned} \tag{7}$$

本模型是在决策最优补货周期，使得零售商利润取得最大值，模型如下：

$$(M) \quad \begin{cases} \max & TP(T) \\ s.t. & 0 < T, 0 < M. \end{cases} \tag{8}$$

4 模型求解

1） 当信用期小于销售周期，即 $M \le T$ ，对目标函数 $TP_1(T)$ 求销售周期 T 的一阶导数得

$$\frac{dTP_1(T)}{dT} = D(T)\Phi_1(T). \tag{9}$$

其中，

$$\begin{aligned} \Phi_1(T) = {} & p + (h + c_e e^{h} + cI_c)\theta^{-1} - [c \\ & + c_e e^{c} + (h + c_e e^{h} + cI_c e^{-\theta M})\theta^{-1}]e^{\theta T}. \end{aligned} \tag{10}$$

关于函数 $TP_1(T)$ ，有如下结论.

引理 1 当 $T \ge M$ 时，函数 $TP_1(T)$ 在 $T^1 = \max\{M, T_1\}$ 处取得最大值，其中，T_1 是方程 $\Phi_1(T) = 0$ 的解，且由公式(12)确定。

证明：对函数 $\Phi_1(T)$ 求导得

$$\begin{aligned} \Phi_1'(T) = {} & -\theta(c + c_e e^{c})e^{\theta T} - (h + c_e e^{h})e^{\theta T} \\ & -cI_c e^{\theta(T-M)}. \end{aligned} \tag{11}$$

由于 $\Phi_1'(T) < 0$ ，所以函数 $\Phi_1(T)$ 是单调递减函数。

令 $\Phi_1(T) = 0$ 得

$$\begin{aligned} T_1 = {} & \theta^{-1}\{\ln[p + (h + c_e e^{h} + cI_c)\theta^{-1}] \\ & -\ln[c + c_e e^{c} + (h + c_e e^{h} + cI_c e^{-\theta M})\theta^{-1}]\}. \end{aligned} \tag{12}$$

由(11)、(12)式知，当 $T < T_1$ 时，有 $\Phi_1(T) > 0$ ，则 $TP_1'(T) > 0$ ，则 $TP_1(T)$ 为单调递增函数；当 $T > T_1$ 时，有 $\Phi_1(T) < 0$ ，则 $TP_1'(T) < 0$ ，则 $TP_1(T)$ 单调递减函数.

结合 $M \le T$ 的分类讨论条件，最优解的确定方法如下.

当 $T_1 \le M$ 时，函数 $TP_1(T)$ 在 $[M,+\infty)$ 内是单调递减，则函数在 M 处取得最大值，即 $T^1 = M$ 。

当 $T_1 > M$ 时，函数 $TP_1(T)$ 在 $(M,T_1]$ 内是单调递增，则函数在 T_1 处取得最大值，即 $T^1 = T_1$ 。

综上所述，当 $T \ge M$ 时，函数 $TP_1(T)$ 在 $T^1 = \max\{M, T_1\}$ 处取得最大值，其中，T_1 是方程 $\Phi_1(T) = 0$ 的解，且由公式(12)确定。

2） 当信用期大于销售周期，即 $M > T$ ，对目标函数 $TP_2(T)$ 求销售周期 T 的一阶导数得

$$\frac{dTP_2(T)}{dT} = D(T)\Phi_2(T). \tag{13}$$

其中，

$$\begin{aligned}\Phi_2(T) = {} & p - ce^{\theta T} - h\theta^{-1}(e^{\theta T} - 1) \\ & -c_e[e^c e^{\theta T} + e^h \theta^{-1}(e^{\theta T} - 1)] \\ & + pI_e(M - T).\end{aligned} \tag{14}$$

关于函数 $TP_2(T)$，有如下结论.

引理 2 当 $T < M$ 时，函数 $TP_2(T)$ 在 $T^2 = \min\{M, T_2\}$ 处取得最大值，其中，T_2 是方程 $\Phi_2(T) = 0$ 的解。

证明：对函数 $\Phi_2(T)$ 求导得

$$\Phi_2'(T) = -\theta(c + c_e e^c)e^{\theta T} - (h + c_e e^h)e^{\theta T} - pI_e. \tag{15}$$

对函数 $\Phi_2(T)$ 求极限得

$$\lim_{T \to 0} \Phi_2(T) = p - c - c_e e^c + pI_e M. \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\lim_{T \to M^-} \Phi_2(T) = {} & p - (c + c_e e^c)e^{\theta M} \\ & -\theta^{-1}(h + c_e e^h)(e^{\theta M} - 1).\end{aligned} \tag{17}$$

由(15)式知，函数 $\Phi_2(T)$ 在 $[0, M)$ 内单调递减。由假设知 $p - c - c_e e^c > 0$，所以 $\lim_{T \to 0} \Phi_2(T) > 0$，故，函数的最优解需要讨论函数 $\Phi_2(T)$ 在区间 $[0, M)$ 右端点极限值的正负性。

当 $\lim_{T \to M^-} \Phi_2(T) > 0$ 时，则函数 $\Phi_2(T)$ 在区间 $[0, M)$ 恒大于零，由(13)式知，$TP_2'(T) > 0$，即目标函数 $TP_2(T)$ 在区间单调递增，最大值在 M 处取得，即 $T^2 = M$；

当 $\lim_{T \to M^-} \Phi_2(T) < 0$ 时，则由根的存在定理知，存在唯一 $T_2 \in (0, M)$，使得 $\Phi_2(T) = 0$，即 $T^2 = T_2$。

综上所述，当 $T < M$ 时，函数 $TP_2(T)$ 在 $T^2 = \min\{M, T_2\}$ 处取得最大值，其中，T_2 是方程 $\Phi_2(T) = 0$ 的解。

定理 设 T^* 时零售商利润的目标函数 $TP(T)$ 的最大值点，则

$$T^* = \begin{cases} T^1, & TP_1(T^1) \geq TP_2(T^2); \\ T^2, & TP_1(T^1) < TP_2(T^2). \end{cases} \tag{18}$$

其中，T^1 是函数 $TP_1(T)$ 的最优解，T^2 是函数 $TP_2(T)$ 的最优解。

基于信用期和补货周期的大小关系，分别讨论了两种情形下的目标函数。通过理论分析和求解，建立了各自最优解的存在性和唯一性，从而可以计算两种情况下的最大利润。通过比较，确定了零售商的利润。

根据引理和定理，模型的求解算法如下。

5 算法

步骤 1 输入参数。通过(12)式计算 T_1，并计算 $T \geq M$ 情形下目标函数 $TP_1(T)$ 最优解 $T^1 = \max\{M, T_1\}$；

步骤 2 求解方程 $\Phi_2(T) = 0$ 的解 T_2，并计算 $T < M$ 情形下目标函数 $TP_2(T)$ 的最优解 $T^2 = \min\{M, T_2\}$；

步骤 3 通过(6)式和(7)式分别计算 $TP_1(T^1)$ 和 $TP_2(T^2)$。如果 $TP_1(T^1) \geq TP_2(T^2)$，则 $T^* = T^1$，$TP^* = TP_1(T^1)$，否则，$T^* = T^2$，$TP^* = TP_2(T^2)$；

步骤 4 通过(3)式计算订购量 Q，通过(4)式计算碳排放量 CE；

步骤 5 计算单位时间碳排放量 CE/T 和单位时间利润 TP/T.

6 数值仿真

针对不同情形，通过分析求解，给出响应的引理与定理，并确定目标函数的最优解，同时，结合理论结果，给出的算法步骤，为了进一步验证模型的有效性和可行性，参照参考文献，将参数设定为 $D_0 = 1000$，$A = 120$，$p = 15$，$c = 8$，$h = 1$，$\lambda = 0.2$，$\theta = 0.23$，$I_e = 0.12$，$I_c = 0.15$，$c_e = 0.1$，$e^c = 5$，$e^h = 2.5$，$e^A = 250$，$E = 6500$。

当 $M = 0.2$，经计算，最优销售周期 $T = 1.3241$，此时销售周期大于信用期，即 $M < T$。模型的最优补货周期、订购量、最大利润、碳排放总量及无碳排放约束下（$c_e = 0$）的各项指标，计算结果见表 1.

表 1 $M = 0.2$ 最优补货策略及指标

c_e	T	TP	TP/T	CE	CE/T
0.1	1.3241	5675.82	4271.55	12083.54	9126.09
0	1.5168	6370.63	4186.97	14934.71	9846.46
Rate	87.30%	89.06%	**102.02%**	80.91%	**92.68%**

由表 1 可知，相对于无碳约束，在碳限额与交易机制下的补货周期、订购量、利润及碳排放量都有不

同程度减少，其中，单位时间利润增长至 102.02%，单位时间碳排放量降低至 92.68%。由此可知，在生产运作方面，碳限额与交易机制在提高单位时间利润的同时还可以有效降低单位时间碳排放量。

为了进一步探究信用期对模型的碳排放的影响，将信用期设为零，也就是与无信用支付策略的模型对比，计算结果如表 2。

表 2 显示，在有信用支付策略支持后，模型的单位时间利润增加至 101.90%，同时单位时间碳排放量减少至 87.43%，这个碳排放减少幅度较大，也就是说，碳限额与交易机制可有效降低单位时间碳排放量。

从图 1 可以看出，随着信用期的逐渐增加，单位时间的碳排放量也在增加，单位时间的总利润也在大幅上升。当贸易信用达到 1.66 时，单位时间的碳排放量达到 10434.6，接近无信用支付策略模型的单位时间碳排放量（10438.47），此时的单位时间利润从无信用支付策略模型的 4191.71 增加到 5864.4，单位时间的利润增加了 1672.69 单位。

表 2 与无信用支付策略模型对比

M	T	TP	TP/T	CE	CE/T
0	1.6646	6997.38	4191.71	17375.53	10438.47
0.2	1.3241	5675.82	4271.55	12083.54	9126.09
Rate	79.55%	81.35%	101.90%	69.54%	87.43%

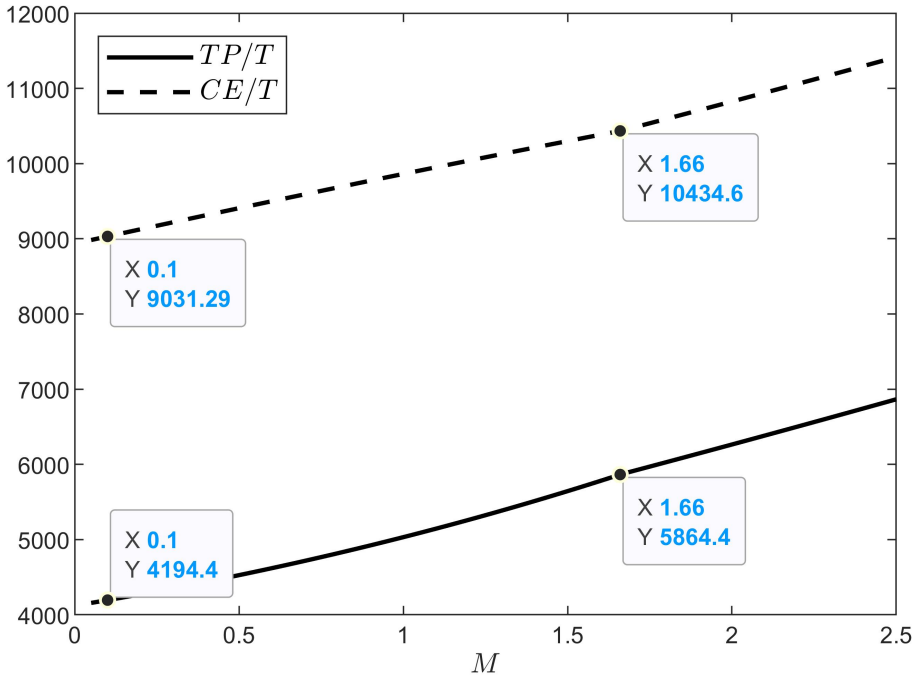

图 1 信用期对单位时间指标的影响

也就是说，在不影响零售商单位时间碳排放量的情况下，将信用期设置为 1.66 可以有效地增加单位时间利润。另外，从单位时间利润的角度观察，当信用期 $M=0.10$ 时，单位时间利润为 4194.4，与无信用支付策略模型的单位时间利润 4191.71 接近，但此时的单位时间碳排放量就由无信用支付策略的模型的 10438.47 减少至 9031.29，单位时间碳排放量减少了 1407.18，单位时间碳排放量将至原来的 86.52%。综上所述，信用支付策略对减少碳排放量有积极的促进作用。

7 结束语

基于碳限额与交易机制，考虑时变需求和产品变质，以零售商的利润为目标函数，同时为了促进碳排放的减少，将信用支付纳入并建立库存模型。首先，通过分析两种情形下目标函数，证明其存在最优解，得到相应的引理和定理等结论，并根据结论设计了算法步骤；其次，将模型参数赋值，运用 MATLAB 软件求解了零售商的最优补货策略及相关指标，验证了模型的有效性；再次，与信用支付策略下的模型对比发现，信用支付策略可以将单位时间碳排放量降低至 87.43%，以此说明信用支付策略能有效促进碳减排；最后，单位时间利润和单位时间碳排放量随着信用期的延长，随之增加，相关企业可根据实时政策控制信用期的长度，从而有效控制碳排放。

参 考 文 献

[1] 鲁力. 不同碳排放政策下的供应链决策及协调研究[D]. 电子科技大学, 2014.

[2] 张如云，刘清. 低碳约束的生产批量优化模型构建与计算[J]. 物流技术. 2019, 38(8): 32-36.

[3] Xu J, Lyu G, Bai Q, et al. Robust pricing and inventory strategies for an omnichannel retailer under carbon tax and cap-and-offset regulations[J]. Computers & Industrial Engineering. 2023, 185: 109615.

[4] 屈晓龙，李波. 碳限额与交易机制下零售商模糊库存模型优化求解[J]. 北京理工大学学报(社会科学版). 2014, 16(06): 20-25.

[5] 黄和艳，李茗，雷钰婷. 碳限额政策下零售商双渠道供应链定价决策[J]. 产业创新研究. 2023(07): 59-61.

[6] 邹清明，刘春，邹霆钧. 资金约束下产出不确定的低碳供应链的融资与协调研究[J]. 运筹与管理. 2022, 31(12): 76-85.

[7] 张克勇，李春霞，姚建明. 考虑碳限额与销售努力的低碳供应链融资决策[J]. 计算机工程与应用. 2020, 56(22): 256-263.

[8] 江文辉，王亚娜，李延来，等. 碳限额与交易政策下变质品的联合定价和库存策略[J]. 计算机集成制造系统. 2020, 26(7): 1951-1964.

[9] 柏庆国，徐贤浩. 碳限额与交易政策下易变质产品的最优库存策略[J]. 中国管理科学. 2017, 25(07): 28-37.

[10] 康凯，赵靖环，张敬，等. 碳限额与交易机制下易变质产品供应链的生产库存控制策略研究[J]. 工业工程与管理. 2016, 21(04): 74-79.

[11] 江文辉，王亚娜，李延来，等. 碳限额与交易政策下变质品的联合定价和库存策略[J]. 计算机集成制造系统. 2020, 26(07): 1951-1964.

[12] Chung K, Huang T. The Algorithm to the EOQ Model for Inventory Control and Trade Credit[J]. OPSEARCH. 2005, 42(1): 16-27.

[13] S. K G, B. C G. Recent trends in modeling of deteriorating inventory[J]. European Journal of Operational Research. 2001, 134(1).

[14] 李忠辉，粟光旺. 信用支付下需求依赖价格的多次订购库存模型[J]. 钦州学院学报. 2016, 31(4): 33-37.

[15] 奚文杰，汪小威，李陶深. 基于多目标优化的网络拥塞控制算法的研究分析[J]. 计算机技术与教育学报. 2025, 13(1): 36-41.

[16] 杨纪龙，李陶深. 基于深度强化学习的车联网任务卸载策略研究进展[J]. 计算机技术与教育学报. 2025, 13(1): 1-5.