

人工智能课程中数学基础的教学体系探讨

邓攀

北京航空航天大学软件学院, 北京 100191

摘要 针对人工智能领域以数学为理论基石和创新引导的特点, 深入分析当前人工智能课程中学生数学基础薄弱的问题, 并强调在人工智能课程中图论、博弈论、贝叶斯理论和马尔可夫模型等数学基础的不可或缺性。通过详实的因果推断和强化学习技术应用案例, 探讨数学基础与人工智能技术融合的方式, 促进理论和实践更有效地交叉应用以满足实际需求, 提高学生的抽象思维、问题分析与解决能力, 深化学生对数学在人工智能应用中的理解。

关键字 人工智能, 数学基础, 学科交叉

Discussion on the Teaching System of Mathematical Foundations in Artificial Intelligence Courses

Pan Deng

School of Software, Beihang University
Beijing 100191, China

Abstract—In view of the fact that mathematics is the theoretical foundation and innovation guide in the field of artificial intelligence, this paper deeply analyzes the problem of weak mathematical foundation of students in current artificial intelligence courses, and emphasizes the indispensability of mathematical foundations such as graph theory, game theory, Bayesian theory and Markov model in artificial intelligence courses. Through detailed causal inference and reinforcement learning technology application cases, this paper explores the way to integrate mathematical foundations with artificial intelligence technology, promotes more effective cross-application of theory and practice to meet practical needs, improves students' abstract thinking, problem analysis and solving abilities, and deepens students' understanding of mathematics in artificial intelligence applications.

Keywords—Artificial intelligence, mathematical foundation, interdisciplinary

1 人工智能课程中数学基础的重要性

近年来, 人工智能领域取得了巨大的突破, 从语音识别到图像处理, 再到自然语言处理, 各种应用层出不穷。随着对人工智能技术需求的不断增加, 各大高校积极响应, 推陈出新, 纷纷开设了涵盖人工智能理论与应用的多样化课程^[1-4], 旨在培养学生具备智能创新思维和解决实际问题的能力。然而, 在人工智能领域, 数学基础被证明是推动技术创新和智能系统设计不可或缺的要素。

人工智能的核心算法和模型深深扎根于数学的土壤之中。如图论作为一项重要的数学工具, 不仅在处理复杂算法和优化问题时发挥关键作用, 还在知识图谱和社交网络分析等领域提供了强大的支持; 逻辑命题作为人工智能中推理和决策的基石, 通过其精确的表达和推理, 使得人工智能系统能够更准确地理解和解决现实中的复杂问题; 博弈论在人工智能中扮演着至关重要的角色, 不仅在智能游戏中显现, 更在多智

能体系统和市场竞争中发挥关键作用^[5], 博弈论的数学模型为人工智能系统提供了理论支持, 使其能够在复杂的环境中进行协同与竞争, 从而更好地应对现实世界中的挑战。此外, 马尔可夫模型、贝叶斯理论等概念在处理不确定性、进行推断和决策制定方面发挥着至关重要的作用。数学不仅是人工智能的语言, 更是人工智能思维的基石, 增强了人工智能系统的灵活性和可靠性。因此, 深刻理解和灵活应用这些数学基础是推动人工智能技术发展的关键。

然而, 当前计算机科学、软件工程等领域的本科生与研究生普遍存在数学基础薄弱的问题。尽管他们能够熟练使用各类工具和框架, 但对背后的数学原理的理解相对表面。这一现象不仅在一定程度上削弱了人工智能技术的可持续发展, 同时, 对数学原理缺乏深刻理解的学生在应用人工智能技术时可能会受到限制, 无法充分挖掘算法的潜力, 从而制约了学生在解决实际问题 and 进行创新性思考时的能力。因此, 加强

数学基础的培养成为提升人工智能课程质量和学生综合素养的迫切需求。

为了解决这一问题，需要深入研究人工智能课程中数学基础的教学方法和策略。概率图模型、马尔可夫模型、贝叶斯理论和博弈论等数学基础都应是人工智能课程教学的主要内容。如何在教学中引导学生深入理解这些数学概念，如何将数学知识与实际应用相结合，使学生具备良好的数学素养，都是当前亟待解决的问题。

2 面向人工智能的数学课程实施现状

尽管数学基础课程在高等教育中占有重要地位，但在人工智能领域的迅速崛起下，传统数学课程设置往往存在一定的缺陷^[6]。传统数学课程往往偏向于理论性较强的数学知识，而缺乏与实际应用场景的结合，导致学生在实践中应用数学知识时出现困难。此外，部分数学课程未能及时跟进人工智能领域的最新发展，导致学生在相关领域的应用能力不足。因此，针对当前数学基础课程设置的缺陷，人工智能课程中数学基础教育的实施策略变得尤为迫切。

随着人工智能领域的快速发展，对数学基础的需求日益凸显，人工智能课程中数学教育的实施策略成为培养高水平人才的关键。在全球范围内，各国和地区都积极探索适应当前趋势的教学体系。例如，王文婷等人提出了人工智能课程与数学课程的连动体系^[7]，以改进教学内容并促进两者之间的衔接。广州开放大学本着学科交叉融合的理念^[8]，积极开发融合人工智能与高等数学课程的教学模式，致力于打造智能化的学习平台，推动模拟探索式教学认识前沿技术中的数学知识。而宋伊萍等人探讨了人工智能专业学生数学能力的培养^[9]，强调了数学基础内容与专业知识的结合重要性，并提出了具体的衔接方式，例如将线性代数中的矩阵、特征值等知识与人工智能中的人脸识别、图像安全等应用场景相结合。此外，韩国在高中层面也响应人工智能普及教育的趋势，开设了“人工智能基础”和“人工智能数学”选修课程^[10]，为实现数学与人工智能的有效衔接做出努力。这些努力和探索为

人工智能领域的教育发展提供了有益的借鉴和启示，凸显了数学基础在培养人工智能人才中的不可或缺性。因此，通过不断的数学基础教学体系探索和课程创新，可以更好地培养具备深厚数学基础的人工智能人才，推动人工智能技术的持续发展。

3 人工智能中的数学基础

在人工智能领域，数学不仅是理论基础，更是推动创新的关键。深度学习中，神经网络的权重和激活函数涉及到线性代数和微积分的概念。概率图模型在机器学习中的应用则紧密依赖概率论的理论基础，被运用于对不确定性和关系的建模。此外，在强化学习领域，马尔可夫决策过程（MDP）的数学框架为制定智能体决策提供了基础。数值优化方法在优化算法中的应用也显得尤为关键，如梯度下降和牛顿法。在自然语言处理方面，词嵌入模型和语言模型的发展同样依赖于线性代数和概率论的应用。数学为研究者提供了工具和语言，助力于理解和解决复杂问题，使得学者们能够更好地设计和优化算法，从而在实际应用中取得更为卓越的效果。

3.1 概率统计

概率统计致力于研究随机现象的规律性和不确定性，包括随机变量、概率分布、统计推断和回归分析等方面^[11]（如图1所示）。随机变量是对随机试验结果的数学描述，可分为离散和连续两种类型，分别用于描述具有有限或无限取值的随机实验结果。概率分布用于描述随机变量可能取值的概率情况，包括概率密度函数和累积分布函数。统计推断则是从样本数据中推断总体特征，涉及参数估计和假设检验。参数估计通过样本数据估计总体参数，如最大似然估计。假设检验用于判断某个假设在给定数据下是否成立，为决策提供统计依据。此外，回归分析研究自变量和因变量之间的关系，通过数学模型预测或解释数据。线性回归是一种常见方法，建立自变量和因变量的线性关系模型，以帮助理解变量之间的影响。这些数学基础概念在概率统计中发挥着关键作用，为研究和解释随机现象提供了坚实的理论基础。

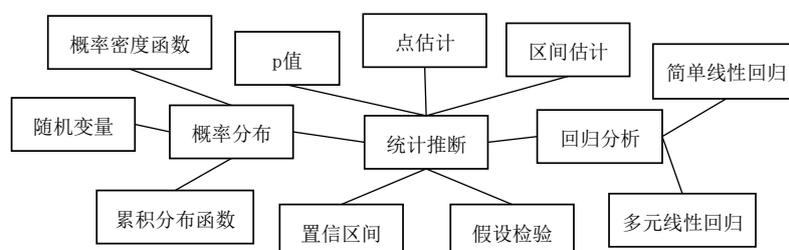


图1 概率统计的概念图

3.2 图论

图论的主要研究对象为图和树这两种抽象结构^[12] (如图 2 所示)。图由节点(顶点)和边的集合组成,其中边连接节点表示它们之间的关系。树则被定义为一种特殊的图,其特点是不包含环,而所有节点通过边相互连接。在图论的基础概念中,路径和环是最为基本的元素,用以描述节点之间的连接和闭合关系。

在图论的应用领域中,路径和环的概念被广泛应用于搜索问题。图论为问题状态空间和搜索空间提供了强大的结构,其中图的节点表示问题的不同状态,边表示状态之间的转移关系。基础的图搜索算法,如深度优先搜索和广度优先搜索,被广泛用于在状态空间中寻找最优解。为提高搜索效率,图搜索算法可通过优化搜索策略,选择更有效的启发式函数或调整算法参数来适应不同的问题场景。这些算法和技术为解决实际问题提供了重要的工具和方法,能够在权衡不同目标的同时找到平衡的解决方案。

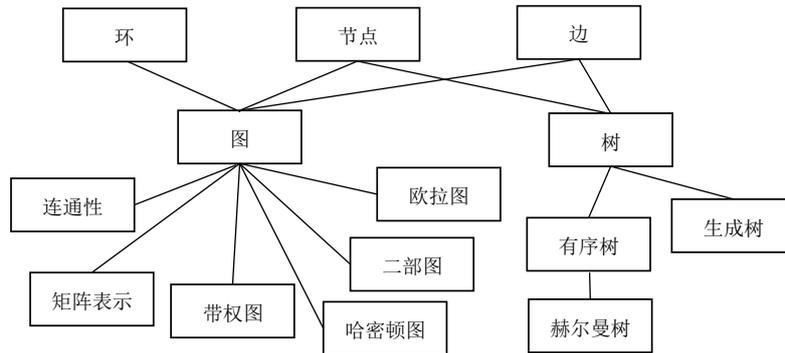


图 2 图论的概念图

3.3 逻辑

逻辑的形式化描述和推理规则在人工智能中提供理论指导。其中以命题逻辑、一阶逻辑和模态逻辑为代表性逻辑体系,包括命题、谓词、量词、公式和推理规则等要素^[13] (如图 3 所示),在知识表示、推理和决策等方面得到广泛应用。在知识表示方面,逻辑提供了一种形式化的方式,用于表达领域知识,使得

计算机能够理解和处理复杂的知识结构。逻辑推理引擎能够自动推断新的结论,赋予系统强大的推理能力。逻辑智能体通过对知识库的应用推理,从而推导新的信息并做出决策。在自然语言处理领域,逻辑模型能够清晰地表达语言中的逻辑结构,提高系统对自然语言输入的理解水平。这不仅有助于实现更精确的语义分析,还为高级语义生成提供了基础支持。

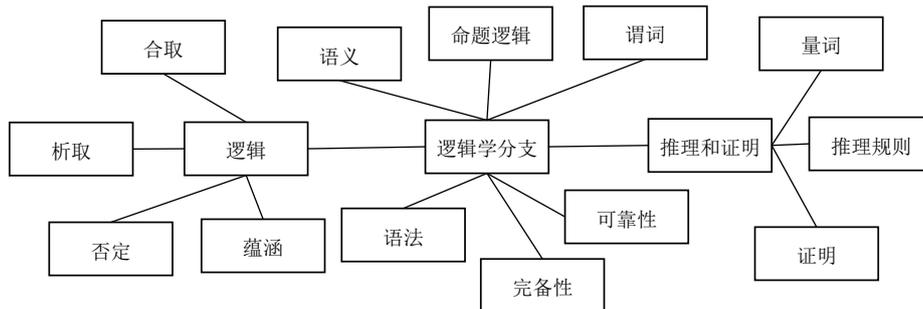


图 3 逻辑的概念图

3.4 贝叶斯理论

贝叶斯理论是概率论中的重要理论之一,其核心思想是通过充分利用先验知识和新的证据来更新对事件发生概率的信念。该理论基于贝叶斯定理^[14],其数学表达式为: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$,其中, $P(A|B)$ 表示在观察到事件 B 的情况下,事件 A 发生的概率; $P(B|A)$

表示在事件 A 发生的情况下,观察到事件 B 的概率; $P(A)$ 和 $P(B)$ 分别表示事件 A 和事件 B 各自发生的概率。

在人工智能领域,贝叶斯方法被广泛应用于处理不确定性、进行推理和进行决策,为系统提供了一种强大的概率建模工具。贝叶斯方法主要包括贝叶斯分类器、贝叶斯网络和贝叶斯优化三部分(概念图如图 4 所示)。

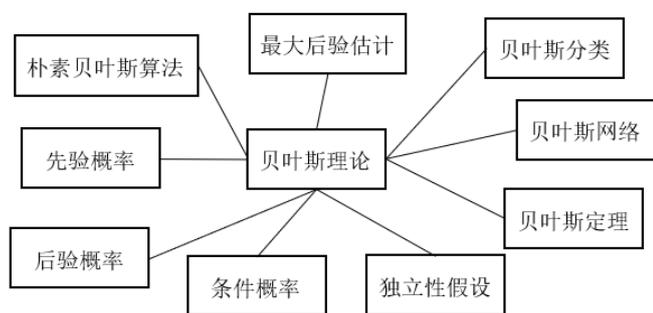


图 4 贝叶斯理论的概念图

(1) 贝叶斯分类: 贝叶斯分类基于先验概率和新的证据, 通过计算给定特征 (例如文本中的词频、词性等) 条件下每个类别的后验概率, 从而更新对事件发生概率的估计。这种方法允许系统更加灵活地适应新数据, 有效处理分类问题。

(2) 贝叶斯网络: 贝叶斯网络是一种概率图模型, 用于表示变量之间的依赖关系。节点代表随机变量, 有向边表示变量之间的依赖。它常用于建模不确定性知识, 并支持推理和决策。

(3) 贝叶斯优化: 贝叶斯优化通过建立目标函数的贝叶斯模型, 引入先验分布进行建模, 并不断更新以找到最优解。在机器学习中, 贝叶斯优化用于调整模型超参数, 提高性能。通过迭代优化, 系统更有效地寻找最优解, 从而提升算法效率和性能。

3.5 马尔可夫模型

马尔可夫模型 (MM) 主要包括齐次马尔可夫链、隐马尔可夫模型 (HMM) 和马尔可夫决策过程 (MDP)^[15]。这些模型主要基于马尔可夫性质, 即未来状态仅与当前状态相关, 可有效对状态转移和观察序列进行建模, 指导智能体在复杂环境中做出有效决策。

马尔可夫链是一种随机过程, 其状态转移概率矩阵遵循马尔可夫性质, 即状态转移仅依赖于当前状态。在齐次马尔可夫链中, 状态转移概率保持不变, 表明系统的动态行为在时间上是稳定的。

隐马尔可夫模型 (HMM) 是一种统计模型, 用于描述观察序列和隐藏状态之间的关系。HMM 包含观察序列、隐藏状态序列、状态转移概率矩阵和观察概率矩阵。在语音识别和自然语言处理领域, HMM 常被用于对序列数据进行建模和预测。

马尔可夫决策过程 (MDP) 是一种基于马尔可夫性质的决策模型, 用于描述智能体与环境的交互过程 (如图 5 所示)。MDP 包括状态空间、动作空间、状态转移概率、奖励函数等要素。通过学习价值函数或策略函数, MDP 能够在不确定环境中做出最优决策, 广泛应用于自动驾驶、游戏智能体等领域。

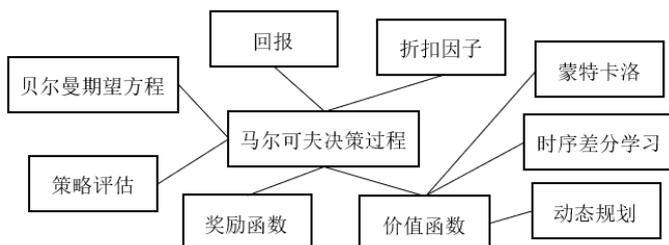


图 5 马尔可夫模型的概念图

3.6 博弈论

博弈论^[16]通过数学模型和分析工具揭示策略选择与结果影响的规律, 主要聚焦于决策制定者之间的相互作用 (概念图如图 6 所示)。在此框架下, 策略被定义为决策制定者可供选择的行动方案, 通常以数学表达式或决策规则的形式进行描述。在人工智能领域, 博弈论的策略概念广泛应用于智能体的行为选择和决策制定中, 如在对抗性环境中制定最佳对策。纳什均衡是博弈论中一个重要的概念, 指的是博弈中各方选择的策略组合, 使得任何一方单独改变策略都不会获得更好的结果。在人工智能领域, 纳什均衡被用来分析智能体之间的交互行为, 并引导智能体选择最优策略。此外, 博弈论中的最优响应函数描述了参与者对手方行动的最佳反应策略, 常被运用于设计智能体的对策策略, 以适应不同情境下的对手行为。在博弈论的理论框架下, 智能体通过纳什均衡分析能够制定最佳策略, 从而在对抗性环境中获得优势。

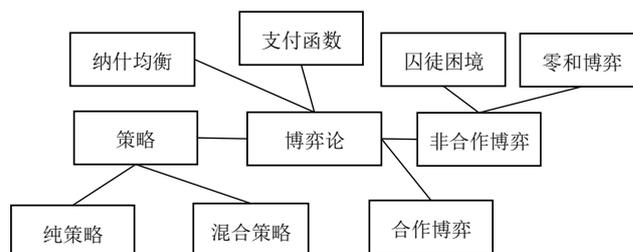


图 6 博弈论的概念图

4 人工智能技术与数学基础的结合

人工智能的核心在于运用基于数学原理设计的算法解决各领域的多样问题。本文以因果推断和强化学习为例, 展现如何使用严密的数学理论框架和方法设计、分析和优化这两种重要方法。

因果推断作为一种统计推断方法^[17], 不仅要理解和解释变量之间的因果关系, 还要能预测未来事件、做出决策和干预行为。现实中观察数据通常是非随机化的, 导致变量之间存在潜在的混淆因素, 可能使推断出的因果效应不准确。因此, 统计方法和模型被用

于控制这些潜在混淆因素,如图7所示。贝叶斯理论在因果推断中发挥关键作用,其应用主要集中在建立因果关系模型、推断因果效应和进行因果推断的过程中。首先贝叶斯网络和因果图常用于建立因果关系模型,贝叶斯网络通过有向无环图表示变量之间的依赖关系和因果关系,而因果图则直观地显示变量之间的因果路径。其次,在建立了模型后,贝叶斯方法通过条件概率分布进行因果效应推断,其中干预分析和反事实推理是主要方法。干预分析通过修改贝叶斯网络的结构或参数来模拟干预效应,并推断因果效应;而反事实推理则通过贝叶斯网络中的概率分布来推断未发生事件的结果。最后,在因果推断过程中,贝叶斯方法有效地处理不确定性,并提供后验概率分布表示对因果关系的信念。比如潜变量因果模型结合了因果推断和潜变量模型的框架,可以通过贝叶斯网络来实现;而因果推断算法如因果森林和受限贝叶斯网络等,能够帮助从观察数据中推断出变量之间的因果关系,进而支持因果推断和预测。

强化学习是一种机器学习方法,其核心思想是通过智能体与环境的交互学习最优行为策略,以最大化长期累积奖励。强化学习算法通常使用值函数和策略指导智能体的行为^[18],如图8所示。值函数用于衡量在某个状态或状态-行动对下的长期累积奖励的期望值,而策略则定义了在每个状态下智能体应该采取的行動的概率分布。此外,马尔可夫模型在这里也发挥着重要的作用,马尔可夫决策过程(MDP)包含了状态、行动、状态转移概率和奖励等关键要素。状态描述了环境的特定情况或配置,行动则是智能体在特定状态下可以执行的操作。

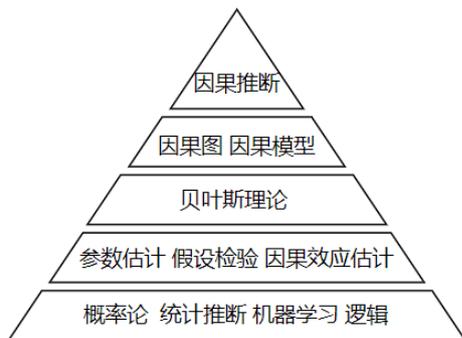


图7 因果推断中数学基础的层级图

状态转移概率则描述了在给定状态下采取某个行动后转移到下一个状态的概率分布,而奖励则是智能体在执行某个行动后从环境中获得的即时反馈。在实际应用中,强化学习算法通过不断地与环境交互、观察奖励和状态转移来学习最优策略。早期的价值迭代方法如价值迭代和策略迭代为其奠定了基础,后来的基于模型的方法如时序差分学习和 Q-learning 逐渐

崭露头角,能够有效处理大规模问题。而随着深度学习技术的发展,深度强化学习技术也给该领域带来了新的突破,如深度 Q 网络(DQN)和深度确定性策略梯度(DDPG)等成功应用于复杂环境中。此外也衍生出更多新兴方法提供新的解决方案,如演化策略利用进化算法的思想优化策略参数,策略梯度方法直接对策略参数进行梯度上升或梯度下降更新策略。这些方法为解决人工智能领域的实际问题提供了强大的工具和技术。

5 人工智能课程中数学基础的教学建议及策略

基于人工智能课程中加强数学基础培养的迫切需求,本课程的设计必须充分考虑数学基础对于提升学生综合素养和优化教师课堂教学的重要性。具体而言,人工智能课程中融合数学基础教学的实施策略可以从课程设计、教学方法以及评估与反馈三个主要方面展开深入分析与改进。

在课程设计方面,本课程的课程大纲设计应确保数学的基础概念贯穿始终,并与人工智能的相关技术紧密结合。这不仅涵盖概率统计、贝叶斯理论、马尔可夫模型、博弈论等核心数学概念,还应该进一步探讨这些概念在机器学习、深度学习中的应用,以展示数学理论在实践中的价值。此外,课程设计应该以将理论知识与实际案例相结合为导向、以有助于学生直观理解数学在人工智能中的应用为目标,考虑引入相关的数学案例以激发学生的学习动力和兴趣。例如,在学习强化学习的相关课程内容时,可以展示智能游戏背景下的案例,利用强化学习和马尔可夫模型结合的方法来设计游戏角色的行为策略。

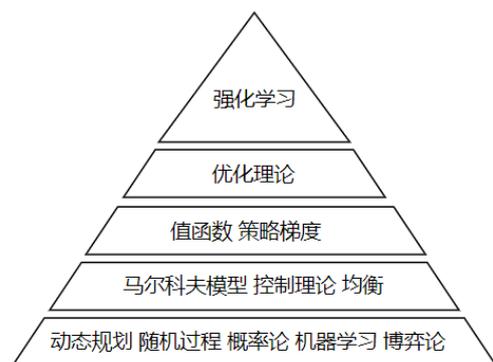


图8 强化学习中数学基础的层级图

在教学方法方面,教师应该采用多样化的教学手段,促进学生更好地理解数学概念与人工智能技术的结合。除了传统的讲授模式和引入实际案例分析外,还可以结合实践操作和小组讨论等教学方式,确保学

生能够从多角度、多层次理解数学概念和应用人工智能技术。例如，在讲授机器学习相关的课程内容时，增加实践操作环节，指导学生通过编程实现简单的神经网络模型，以加深对概念的理解和掌握。同时，组织小组讨论引导学生共同探讨实验结果，深化理解基础概念的同时提升学生们的沟通能力和合作精神。

在评估与反馈方面，本课程的评估策略应该全面覆盖学生对数学基础和其在人工智能领域中应用能力的掌握情况。评估方法可以多样化地通过作业测验、文献综述、大报告等方式进行，以全面地检测学生对人工智能技术和数学概念的理解、分析和评价等多层次的认知能力。这种积极的评估反馈机制不仅评估学生的知识掌握情况，还有效地发展学生的批判性思维和研究能力，为未来的学术发展和职业生涯奠定坚实的基础。

人工智能与数学基础交叉融合的教学实施策略至关重要。通过合理的课程大纲设计、多样化的教学方法以及有效的评估与反馈，可以有效促进学生对数学概念的理解和掌握，提高其在人工智能领域的应用能力，为培养高水平的人工智能人才做出积极贡献。

6 教学实践成效

在 2023-2024 学年秋季学期，人工智能课程中首次采用了人工智能与数学基础交叉融合的教学模式，共有 184 名硕士和博士研究生参与学习。根据课程实施的具体情况，从学生学科背景、期末成绩、学生评教分数以及教学评价四个方面进行了深入的调研与分析，得出以下结论：

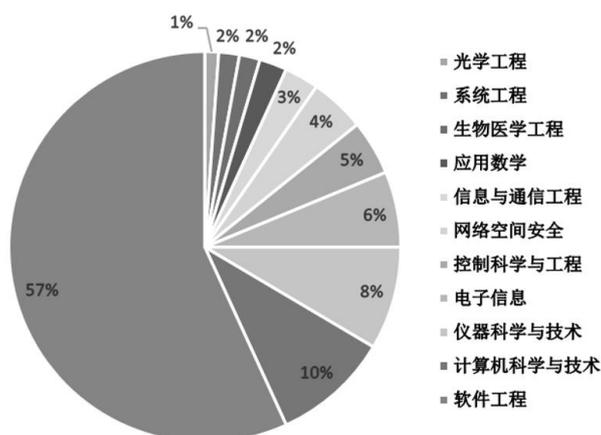


图 9 学生专业背景分布饼状图

(1) 在学生的学科专业背景方面，调研结果显示，选修本课程的学生大多来自工科专业，具体如图 9 所示，与人工智能技术密切相关的专业背景学生占据主导，其中软件工程专业和计算机科学与技术专业

的学生占比高达 67%。与此相对比，仅有 2% 的学生来自应用数学专业，这一数据反映出大部分学生数学基础较为薄弱，进一步突显了在人工智能课程中融入数学基础教育的必要性与迫切性。这也为教学改革提供了有力的依据，证明通过加强数学与人工智能课程的深度融合，不仅能够更好地满足学生的实际学习需求，也有助于提升他们在人工智能领域的应用能力。

(2) 在学生成绩方面，本课程的成绩评定由个人报告成绩 (60%) 和组队报告成绩 (40%) 共同构成。根据统计，本课程的平均成绩为 90.87 分，整体表现如表 1 所示，及格率高达 99%，其中接近 74% 的学生成绩在 90 分以上。整体来看，学生在课程中表现出较高的学习参与度与主动性，绝大部分学生能够按时并高质量地完成个人与团队项目。

表 1 学生课程成绩分布表

分数区间	人数	占比
>=95	5	2.72%
90-95	131	71.20%
85-90	40	21.74%
80-85	6	3.26%
60-80	0	0.00%
<60	2	1.09%

教学过程中，学生反馈积极，教学秩序稳定，教学目标得到了较好实现。这一成绩分布表明，采用数学与人工智能融合的教学模式，有助于学生更好地理解课程内容，并在知识应用和实践操作上取得了良好的效果，进一步证明了该教学模式在提升教学质量和学习效果方面的有效性。

(3) 在学生评教分数方面，本次教学评估向学生发放了 184 份问卷，共回收了 173 份，参评率达到 94.02%，具体调研结果如图 10 所示。从图表中可以看出，学生对教师的整体评价总体积极。在五个主要评估维度中，“非常同意”的比例均超过 60%，尤其是在“教师知识传授”和“教师备课充分”两个方面，学生的“非常同意”的比例高达 70% 左右，而且“同意”的比例占据了较大部分，约为 30%，这显示出大多数学生对教师的教学效果非常的肯定。此外，选择“一般”、“不同意”和“非常不同意”的同学比例均低于 5%，这也侧面表明学生大多数对于教学质量和课堂体验感到满意，特别是在“教师讲课条理清晰”和“教师重视学生，注重鼓励和引导”这两个方面，尽管“非常同意”的比例略低于其他维度，但“同意”的占比依旧较高，这也说明这些方面得到了同学们的广泛认可。并且“向其他同学推荐此为老师”中“非常同意”和“同意”占比将近 95%，可以看出学生对于老师总体的

- 建的思考[J].现代职业教育,2022,(25):97-99.
- [10] 安彦斌.从韩国高中“人工智能数学”课程看高中数学课程与人工智能教育的衔接[J].数学教育学报,2022,31(05):36-40.
- [11] Murphy K P. Probabilistic machine learning: an introduction[M]. MIT press, 2022.
- [12] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan, 1976.
- [13] McCarthy J. Mathematical logic in artificial intelligence[J]. Daedalus, 1988: 297-311.
- [14] Garbolino P. Bayesian theory and artificial intelligence: The quarrelsome marriage[J]. International journal of man-machine studies, 1987, 27(5-6): 729-742.
- [15] Fosler-Lussier E. Markov models and hidden Markov models: A brief tutorial[J]. International Computer Science Institute, 1998.
- [16] Tennenholtz M. Game theory and artificial intelligence[C]//Foundations and Applications of Multi-Agent Systems: UKMAS Workshops 1996–2000 Selected Papers. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002: 49-58.
- [17] Molak A. Causal inference and discovery in Python: machine learning and Pearlian perspective: unlock the secrets of modern causal machine learning with DoWhy, EconML, PyTorch and more[J]. (No Title).
- [18] Arulkumaran K, Deisenroth M P, Brundage M, et al. Deep reinforcement learning: A brief survey[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2017, 34(6): 26-38.